6.4. ПОВРШИНСКИ ИНТЕГРАЛ ПРВЕ ВРСТЕ

Нека је дата глатка површ $S \subset \mathbf{R}^3$ једначином

$$\vec{r}(u,v) = \varphi(u,v)\vec{\imath} + \psi(u,v)\vec{\jmath} + \chi(u,v)\vec{k}, \quad (u,v) \in \Delta, \tag{1}$$

$\dot{\vec{r}}_u \times \dot{\vec{r}}_v \neq 0$, где је Δ мерљива затворена област, функције φ, ψ, χ су непрекидно диференцијабилне на Δ, а S је ограничена део-по-део глатком кривом. Претпоставимо да је на S задата непрекидна реална функција $f(x,y,z)$.

Уочимо произвољну поделу $T = \{\, \Delta_i \mid i = 1, \ldots, p \,\}$ области Δ. Подела T индукује поделу $T' = \{\, S_i \mid i = 1, \ldots, p \,\}$ на површи S. У сваком делу S_i поделе T' изаберимо тачку $M_i(x_i, y_i, z_i)$, при чему је $x_i = \varphi(u_i, v_i)$, $y_i = \psi(u_i, v_i)$, $z_i = \chi(u_i, v_i)$ за неко $(u_i, v_i) \in \Delta_i$, $i = 1, \ldots, p$.

Посматрајмо збир

$$\sum_{i=1}^{p} f(x_i, y_i, z_i) \cdot \mu S_i. \tag{2}$$

Коначни лимес интегралног збира (2) кад $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant p} \delta S_i \to 0$ (са δS_i означен је дијаметар скупа S_i) назива се **површинским интегралом прве врсте** функције $f(x,y,z)$ по површи S и означава се са

$$\iint_S f(x,y,z)\, dS.$$

Став 6.4.1

Нека је $S \subset \mathbf{R}^3$ глатка површ, $f,\ g\colon S \to \mathbf{R}$ и интеграли $\iint_S f(x,y,z)\, dS$ и $\iint_S g(x,y,z)\, dS$ постоје. Тада важи

1° $\iint_S (\alpha f(x,y,z) + \beta g(x,y,z))\, dS = \alpha \iint_S f(x,y,z)\, dS + \beta \iint_S g(x,y,z)\, dS$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

2° $\iint_S f(x,y,z)\, dS = \iint_{S_1} f(x,y,z)\, dS + \iint_{S_2} f(x,y,z)\, dS$ ако је $S = S_1 \cup S_2$ и површи S_1 и S_2 немају заједничких унутрашњих тачака.

3° Ако је $f(x,y,z) \leqslant g(x,y,z)$, $(x,y,z) \in S$, онда је $\iint_S f(x,y,z)\, dS \leqslant \iint_S g(x,y,z)\, dS$.

4° Ако је $f(x,y,z)$ непрекидна функција на S, онда постоји тачка $\overline{M}(\xi,\eta,\zeta) \in S$, таква да је $\iint_S f(x,y,z)\, dS = f(\xi,\eta,\zeta)\mu S$, где је μS површина површи S. ■

... прве врсте своди се на израчунавање

Kako se izračunava površinski integral prve vrste?
Neka je površ S zadata jednačinom $z=z(x,y)$, pri čemu su njeni parcijalni izvodi po x i y neprekidne funkcije. Označimo sa σ projekciju oblasti S na ravan Oxy. Može se dokazati da je

$$dS = \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy\,, \tag{3}$$

i

$$\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_\sigma f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy\,. \tag{4}$$

Formula (4) pokazuje da se izračunavanje površinskog integrala svodi na izračunavanje dvostrukog integrala kada je površ S zadata jednačinom $z=z(x,y)$.

Analogno se mogu izvesti i formule kada je površ S zadata jednačinama $x=x(y,z)$ ili $y=y(x,z)$:

$$\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_{\sigma_{xz}} f(x,y(x,z),z)\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\,dxdz\,,$$

$$\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_{\sigma_{yz}} f(x(y,z),y,z)\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\,dydz$$

Primjer 1. Izračunati $\iint_S\left(z+2x+\frac{4}{3}y\right)dS$, gdje je S dio ravni $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$ u I oktantu.

Projekciju površi S na ravan Oxy označimo sa σ. Imamo $\sigma:\begin{cases}0\le x\le 2\\ 0\le y\le 3-\frac{3}{2}x\end{cases}$. Dalje je

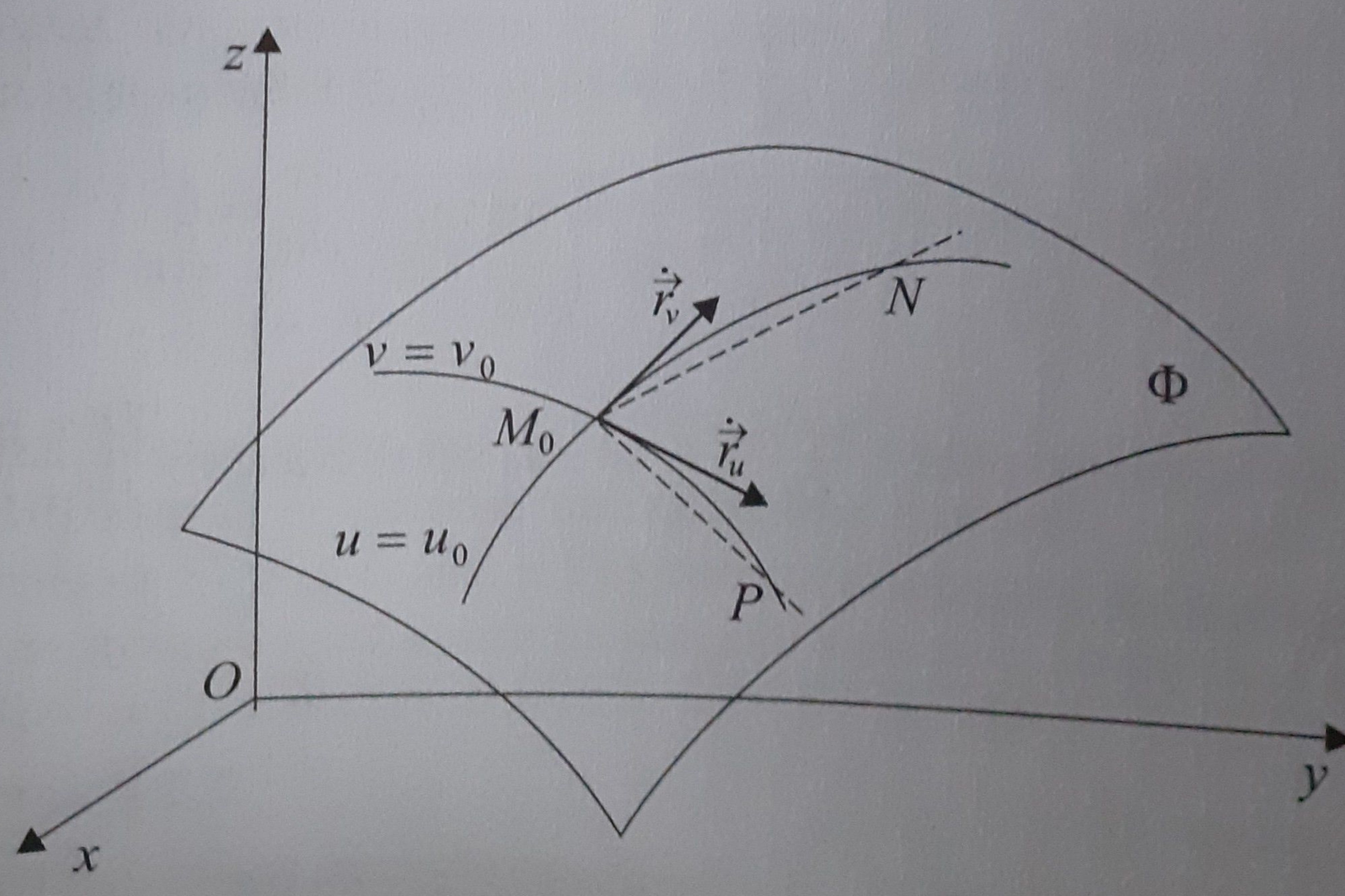
$$z=4\left(1-\frac{x}{2}-\frac{y}{3}\right),\qquad dS=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy=\sqrt{1+4+\frac{16}{9}}dxdy=\frac{\sqrt{61}}{3}dxdy\,,$$

$$\iint_S\left(z+2x+\frac{4}{3}y\right)dS=\iint_\sigma\left(-2x-\frac{4}{3}y+4+2x+\frac{4}{3}y\right)\frac{\sqrt{61}}{3}dxdy=4\sqrt{61}\,.$$

Посматрајмо глатку 2-површ Φ дату једначином $\vec{r} = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, $(u,v) \in G \subset \mathbf{R}^2$. Нека је $M_0(x_0, y_0, z_0)$ фиксирана произвољна тачка на површи Φ, $x_0 = x(u_0, v_0)$, $y_0 = y(u_0, v_0)$, $z_0 = z(u_0, v_0)$. Криве линије

$$x = x(u_0, v),\ y = y(u_0, v),\ z = z(u_0, v) \quad \text{и} \quad x = x(u, v_0),\ y = y(u, v_0),\ z = z(u, v_0)$$

налазе се на површи Φ и пролазе кроз тачку M_0, сл. 4.5.1. Оне се називају **координатним линијама**. Уочимо криву $u = u_0$ и на њој тачку N. Гранични положај сечице M_0N, кад тачка N тежи тачки M_0, јесте тангента криве $u = u_0$ у тачки M_0. Слично, гранични положај сечице M_0P, кад тачка P тежи тачки M_0 остајући на кривој $v = v_0$, јесте тангента криве $v = v_0$ у тачки M_0. Како ове две тангенте леже у тангентној равни у тачки M_0, то је нормала тангентне равни паралелна вектору $\dot{\vec{r}}_u \times \dot{\vec{r}}_v$ (претпостављаћемо да је тај векторски производ различит од нуле).



Сл. 4.5.1

Дакле, вектор нормале тангентне равни у произвољној тачки (x, y, z) можемо написати у облику

$$\dot{\vec{r}}_u \times \dot{\vec{r}}_v = \left(\frac{D(y,z)}{D(u,v)}, \frac{D(z,x)}{D(u,v)}, \frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right),$$

где су са $\dfrac{D(y,z)}{D(u,v)}, \dfrac{D(z,x)}{D(u,v)}, \dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}$ означени кофактори матрице

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix}$$

добијени прецртавањем њене прве, друге, односно треће колоне. Та матрица је, уствари, транспонована матрица Јакобијеве матрице пресликавања $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$; услов $\dot{\vec{r}}_u \times \dot{\vec{r}}_v \neq 0$ значи да је претпостављено да је она ранга 2. Према томе, једначине тангентне равни и нормале површи су

$$\frac{D(y,z)}{D(u,v)}(X - x) + \frac{D(z,x)}{D(u,v)}(Y - y) + \frac{D(x,y)}{D(u,v)}(Z - z) = 0, \tag{6}$$

односно

$$\frac{X - x}{\dfrac{D(y,z)}{D(u,v)}} = \frac{Y - y}{\dfrac{D(z,x)}{D(u,v)}} = \frac{Z - z}{\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}}. \tag{7}$$

Primjer 2. Naći $\iint\limits_S x dS$, gdje je S dio sfere $x^2+y^2+z^2=R^2$ koji se nalazi u I oktantu.

Projekcija površi S na ravan Oxy je dio kruga $x^2+y^2 \le R^2$ koji se nalazi u I kvadrantu. Označimo ovu oblast sa σ. Dalje je $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}, \qquad dS=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy=$$

$\dfrac{Rdxdy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$. Uvedimo polarne koordinate: $x=\rho\cos\varphi$ $y=\rho\sin\varphi$. Tada je

$$\iint\limits_S x dS = R\iint\limits_\sigma \frac{xdxdy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} = R\int_0^R d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho^2}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\cos\varphi d\varphi = R\int_0^R \frac{\rho^2 d\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}}=\frac{\pi R^3}{4}.$$

Neka je površ S zadata parametarskim jednačinama: $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$, $z=z(u,v)$, $(u,v)\in\omega$. Ako je bar jedna od determinanti

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

različita od nule, tada je

$$dS=\sqrt{EG-F^2}\,dudv,$$

gdje je

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2, G=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

$$F=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Može se dokazati da je

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dS=\iint\limits_\omega f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}\,dudv.$$

Primjer 3. Naći $\iint\limits_S (x+y+z)dS$, ako je S gornja strana sfere $x^2+y^2+z^2=1$.

Projekcija oblasti S na ravan Oxy je krug $\sigma: x^2+y^2\le 1$. Zadatak ćemo riješiti na dva načina.

I način: Jednačina gornje polusfere je $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Slijedi, $dS = \dfrac{dxdy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$ i

$I = \iint_S (x + y + z)dS = \iint_\sigma \left(x + y + \sqrt{1 - x^2 - y^2}\right)\dfrac{dxdy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$. Uvodeći polarne koordinate $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ dobijamo da je

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho \frac{\rho\cos\varphi + \rho\sin\varphi + \sqrt{1-\rho^2}}{\sqrt{1-\rho^2}} d\rho =$$

$$\int_0^{2\pi} (\cos\varphi + \sin\varphi)d\varphi \cdot \int_0^1 \frac{\rho^2}{\sqrt{1-\rho^2}} d\rho + \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho d\rho = \pi .$$

2. način: Jednačina polusfere u parametarskom obliku (koriste se sferne koordinate) glasi: $x = \cos\varphi\sin\psi$, $y = \sin\varphi\sin\psi$, $z = \cos\psi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \psi \le \dfrac{\pi}{2}$. Kako je $E = \sin^2\psi$, G=1 i F=0, to je $dS = \sqrt{EG - F^2}\, d\varphi d\psi = \sin\psi d\varphi d\psi$, odnosno

$$\iint_S (x + y + z)dS = \iint_\sigma (\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\sin\psi + \cos\psi)\sin\psi d\varphi d\psi =$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\sin\psi + \cos\psi)\sin\psi d\psi = \pi .$$

6.5. ПОВРШИНСКИ ИНТЕГРАЛ ДРУГЕ ВРСТЕ

Оријентација површи

Нека је глатка површ S затворена или ограничена део-по-део глатком кривом k. Одређености ради претпоставимо да је S дата једначином $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$. У свакој тачки површи дефинисана су два јединична вектора нормале. Ако један означимо са $\vec{n}$, други ће бити $-\vec{n}$.

Нека је M_0 произвољна тачка површи S. Са l означимо произвољну затворену криву на S, која садржи M_0 и не сече k. Уочимо тачку M која се креће по кривој l, полазећи из M_0, и враћа се у M_0, прошавши свим тачкама криве l. Притом посматрајмо промењљиви вектор $\vec{n}(M)$, такав да је у почетку кретања $\vec{n}(M_0) = \vec{n}_0$ (један од два могућа вектора у тачки M_0), и чија је промена непрекидна при кретању тачке M.

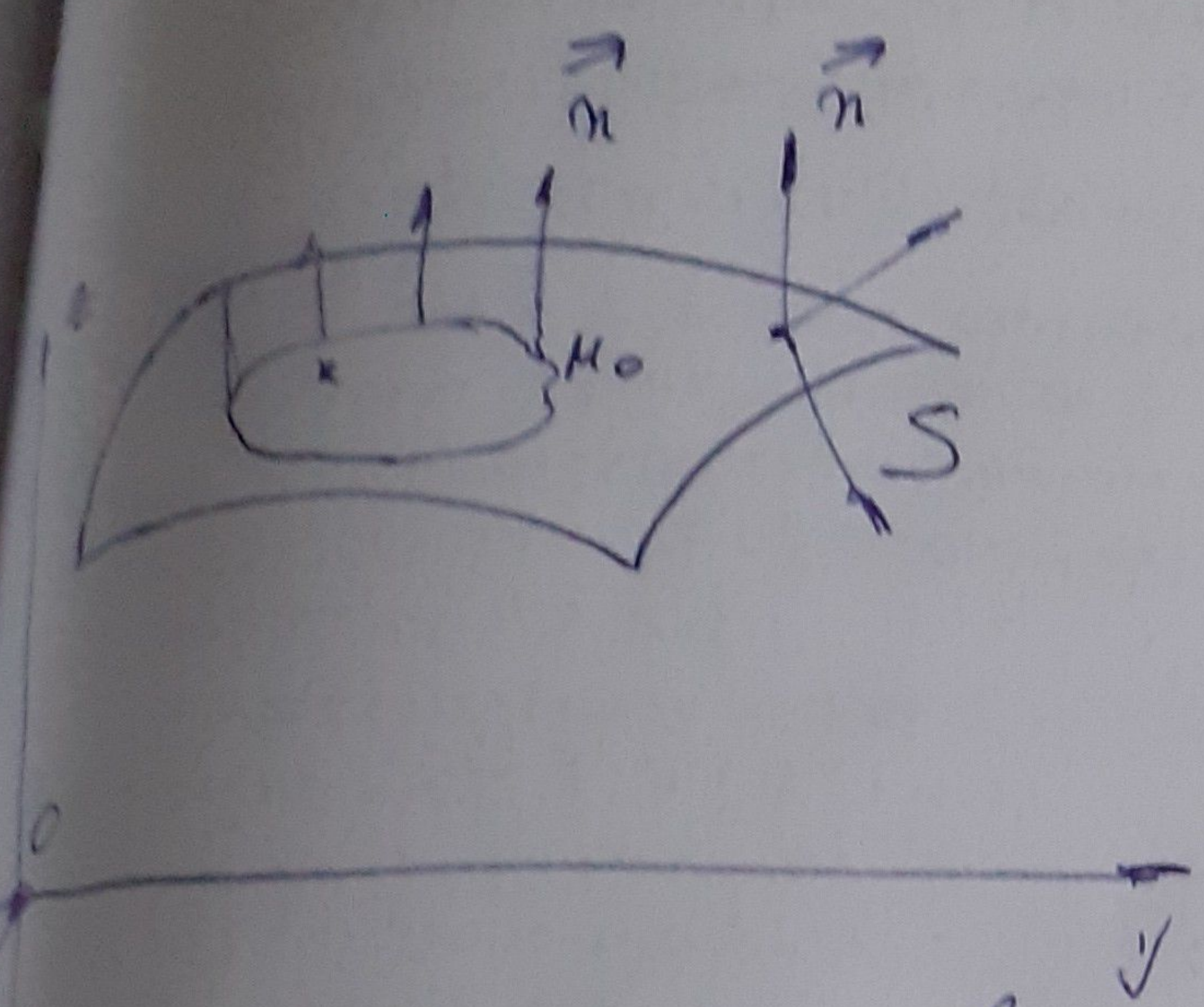
Могу наступити два случаја – јединични вектор нормале $\vec{n}(M)$ на крају кретања, у тачки M_0 је $\vec{n}_0$ (промењљиви вектор нормале долази у почетни положај) или $-\vec{n}_0$ (промењљиви вектор нормале долази у супротан положај).

Ако се за сваку тачку M_0 површи S и сваку затворену криву на површи, која садржи тачку M_0, промењљиви вектор нормале враћа у почетни положај, површ S ћемо називати **двостраном површи**. Сваки од два супротна вектора нормале у произвољној тачки M површи одређује по једну њену страну. Помоћу ових вектора нормала можемо оријентисати површ S. Ако страну површи коју одређује вектор $\vec{n}$ назовемо позитивном (позитивна страна површи S види се са краја вектора $\vec{n}$ ако му је почетак у тачки M), онда ћемо другу страну површи називати негативном.

Примера ради, двостране и, према томе, оријентабилне површи су сфера, елиптички и хиперболички параболоид и др.

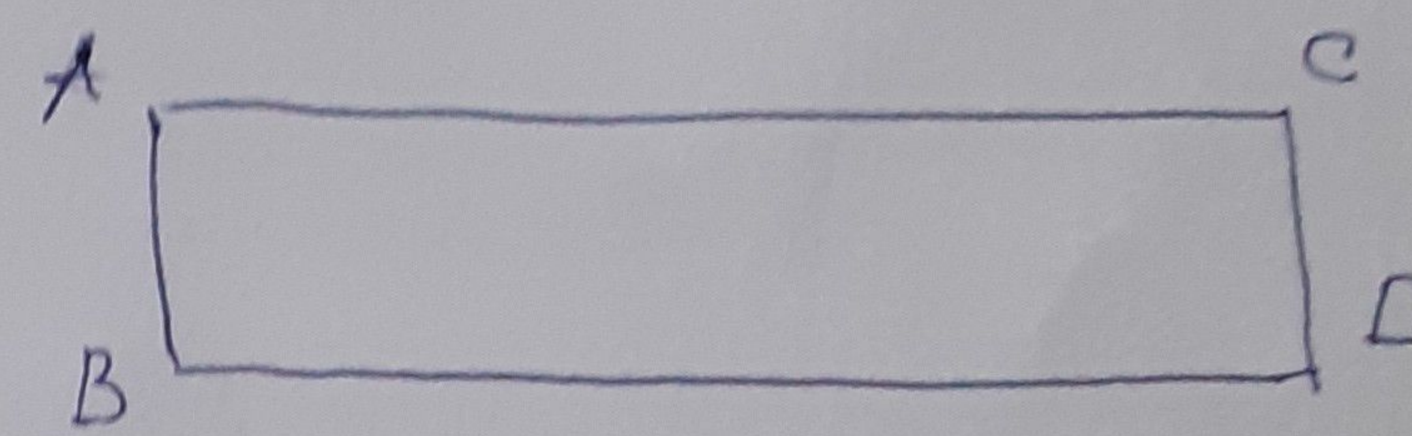
Ако постоји бар једна тачка $N_0 \in S$ и бар једна затворена крива N_0ABN_0 на површи S, тако да произвољни вектор нормале долази у супротни положај у тачки N_0, онда за сваку тачку $N \in S$ постоји крива l' по којој промењљиви вектор нормале долази у супротан положај (притом се подножје промењљивог вектора креће по кривој l'). Заиста, ако криву NN_0ABN_0N узмемо за криву l', онда промењљиви вектор нормале, полазећи од тачке N, долази у супротан положај.

Овакве површи ћемо називати **једностраним површима**. Оне су неоријентабилне. Као пример једностране, неоријентабилне површи наведимо Мебиусову траку (в. пример 4.4.2).

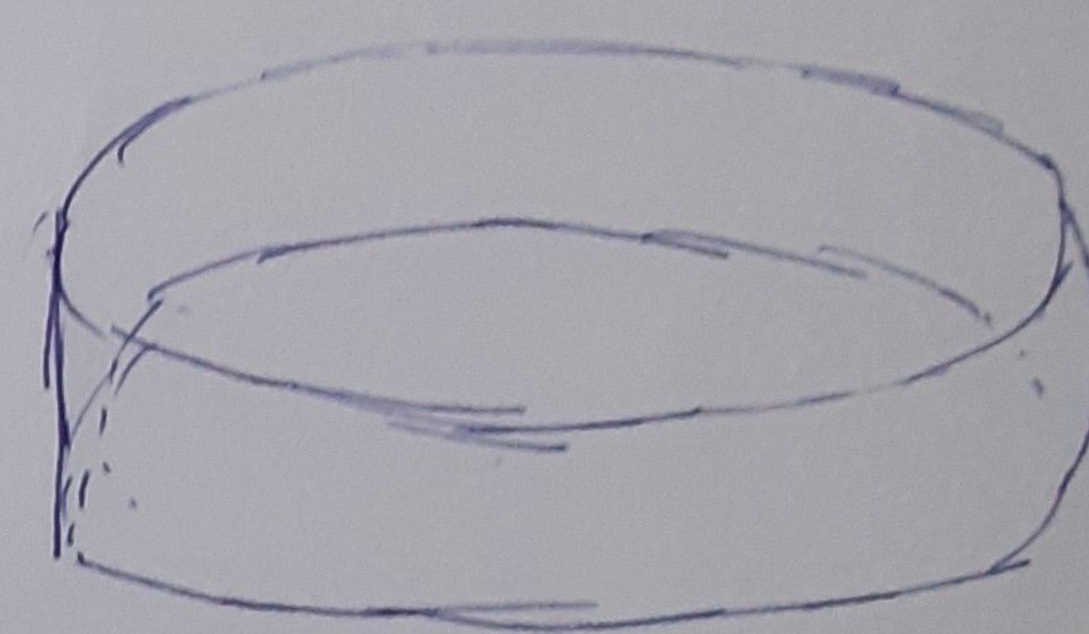


Двострана површ

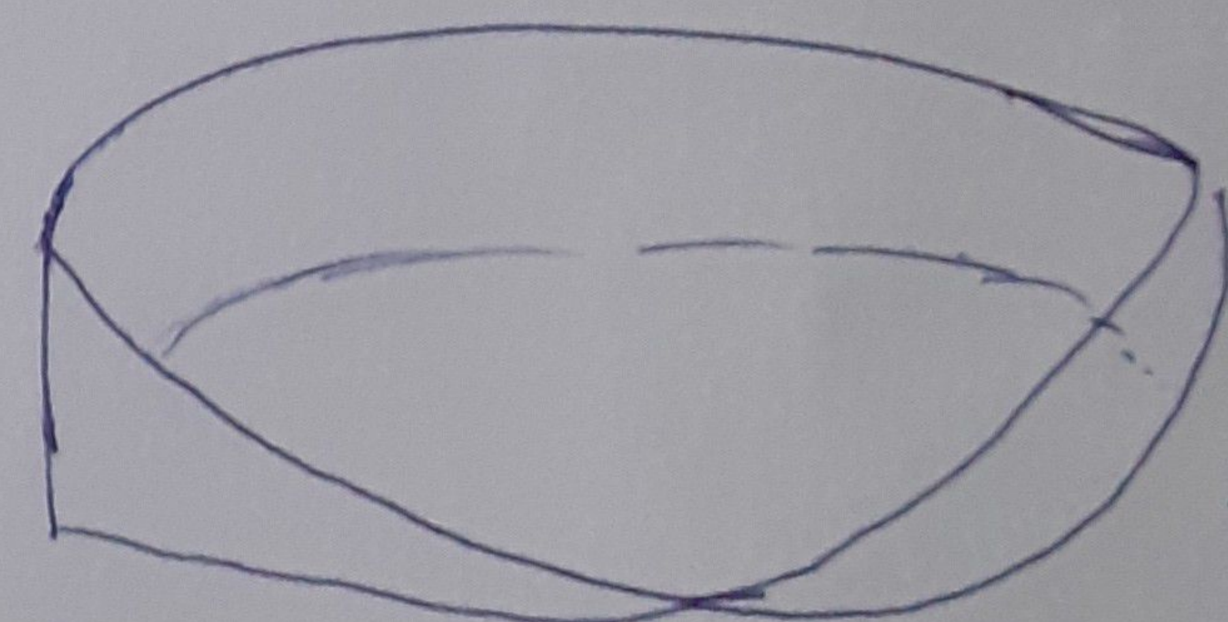
Мебијусова трака



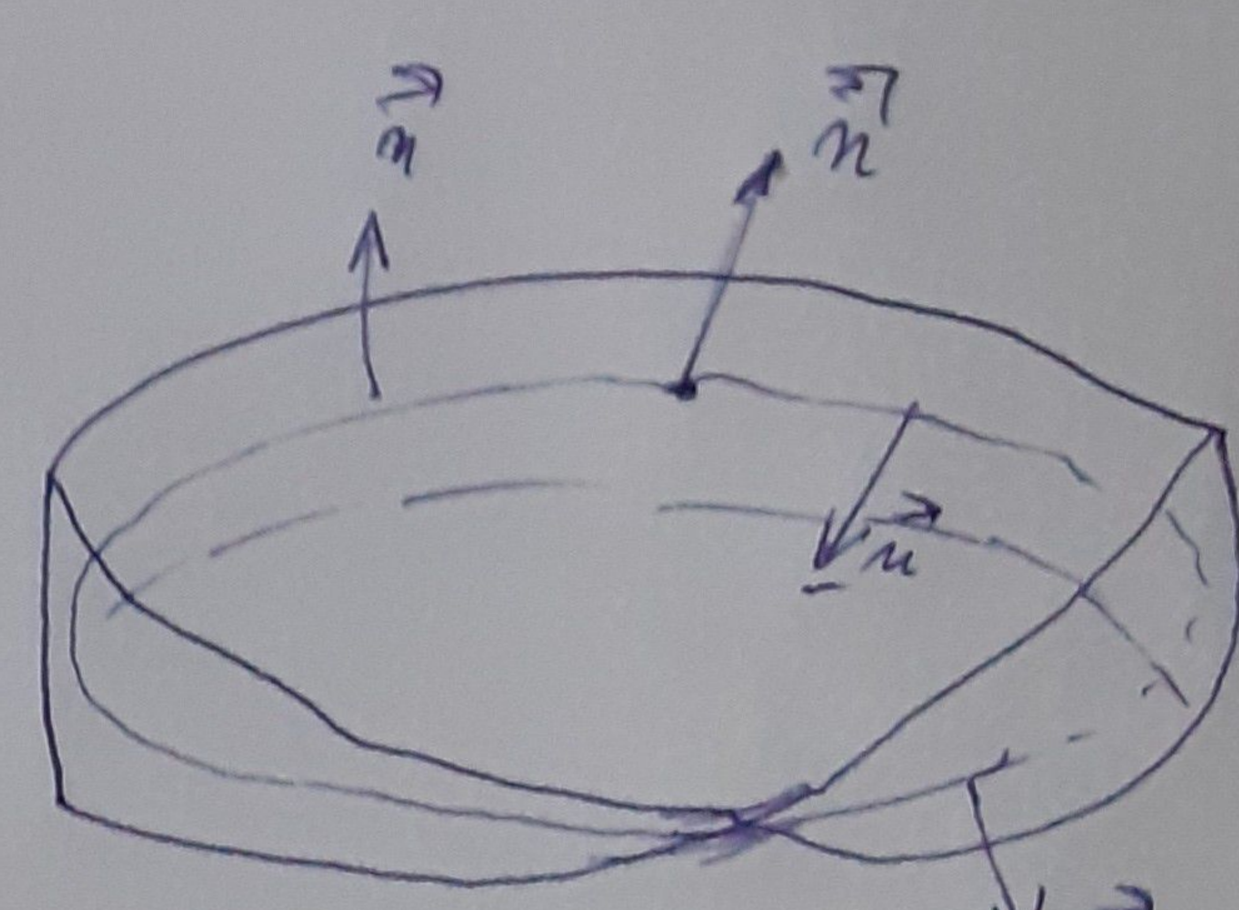
A – D ⟶ Мебијусова трака
B – C



A – C
B – D



A – D
B – C



Nadalje ćemo smatrati da je S orijentisana površ (na kojoj je već izabrana strana) koju ograničava kontura G (nema tačaka samopresijecanja). Za površ S kažemo da ima pozitivnu orijentaciju, ako pri obilasku po konturi G površ ostaje sa lijeve strane u odnosu na tačku oko koje se vrši obilazak. Suprotan pravac smatramo negativnim.

Sada ćemo navesti definiciju površinskog integrala druge vrste.

Neka je zadata orijentisana površ $S: z = f(x, y)$. Neka je $R(x, y, z)$ funkcija definisana na površi S. Ako vektori normale na površ S grade oštre uglove sa osom

Oz. tada kažemo da je izabrana gornja strana površi S. U suprotnom –donja strana površi S. Razbijmo površ S na n djelova: $\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots, \Delta S_n$ koji nemaju zajedničkih unutrašnjih tačaka. U svakoj od površi ΔS_i izaberimo po jednu tačku M_i. Projekciju površi ΔS_i na ravan Oxy označimo sa $\Delta\sigma_i$. Sastavimo sume $\sum_{i=1}^{n} R(M_i)\Delta s_i$, gdje je Δs_i površina od $\Delta\sigma_i$ uzeta sa znakom + ako je izabrana gornja strana površi S, i sa znakom – ako je izabrana donja strana površi S. Sumu $\sum_{i=1}^{n} R(M_i)\Delta s_i$ nazivamo integralna suma za funkciju $R(M)$ po površi S. Označimo je sa I_n. Neka je λ najveći dijametar u podjeli $\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots, \Delta S_n$.

Definicija 2. Ako postoji konačna granična vrijednost $I = \lim_{\lambda \to 0} I_n$, nezavisno od toga kako je oblast S razbijena na djelove ΔS_i i od toga kako su tačke M_i uzete iz ΔS_i, tada broj I nazivamo površinski integral druge vrste od funkcije $R(x, y, z)$ po izabranoj strani površi S i označavamo $\iint_S R(M)\,dxdy$ ili $\iint_S R(x, y, z)\,dxdy$.

Na sličan način se definišu površinski integrali druge vrste od funkcija $P(x, y, z)$ i $Q(x, y, z)$ po površi S: $\iint_S P(x, y, z)\,dydz$, $\iint_S Q(x, y, z)\,dxdz$.

Sumu

$$\iint_S P(x, y, z)\,dydz + \iint_S Q(x, y, z)\,dxdz + \iint_S R(x, y, z)\,dxdy$$

(uobičajeno) nazivamo površinskim integralom druge vrste i označavamo kratko

$$\iint_S P(x, y, z)\,dydz + Q(x, y, z)\,dxdz + R(x, y, z)\,dxdy.$$

Za površinski integral druge vrste važe ista svojstva kao i za površinski integral prve vrste, izuzev jednog: pri promjeni strane površi mijenja se znak integrala.

Kako se izračunava površinski integral druge vrste?

Neka je S orijentisana površ (sa izabranom stranom) zadata jednačinom $z = z(x, y)$, gdje je $z(x, y)$ neprekidna funkcija u zatvorenoj oblasti σ koja je projekcija površi S na ravan Oxy. Neka je $R(x, y, z)$ neprekidna funkcija na površi S. Može se dokazati da je

$$\iint_S R(x, y, z)\,dxdy = \iint_\sigma R(x, y, z(x, y))\,dxdy.$$

Na sličan način se dokazuje da je

$$\iint_S P(x,y,z)dydz = \iint_{\sigma_1} P(x(y,z),y,z)dydz\,,$$

$$\iint_S Q(x,y,z)dxdz = \iint_{\sigma_2} Q(x,y(x,z),z)dxdz\,,$$

gdje su σ_1 i σ_2, redom, projekcije površi S na koordinatne ravni Oyz i Oxz.

Primjer 8. Izračunati $\iint_S xdydz + ydxdz + zdxdy$, gdje je S gornja strana ravni $x+z-1=0$ odsječena ravnima $y=0$, $y=4$ u I oktantu.

Saglasno definiciji imamo da je $\iint_S xdydz + ydxdz + zdxdy = \iint_{\sigma_1} x(y,z)dydz + \iint_S ydxdz + \iint_{\sigma_2} z(x,y)dxdy$, gdje su σ_1 i σ_2, redom, projekcije površi S na koordinatne ravni Oyz i Oxy. Dalje je

$\iint_S ydxdz = 0$, jer je osa Oy paralelna površi površ S,

$$\iint_S xdydz = \iint_{\sigma_1}(1-z)dydz = \int_0^4 dy\int_0^1(1-z)dz = 2\,,$$

$$\iint_S zdxdy = \iint_{\sigma_2}(1-x)dxdy = \int_0^4 dy\int_0^1(1-x)dx = 2\,,$$

odnosno

$$\iint_S xdydz + ydxdz + zdxdy = 2+0+2=4\,.$$

Postoji veza između površinskih integrala prve i druge vrste. Označimo sa α, β i γ uglove koje gradi normala orijentisane površi S sa koordinatnim osama. Može se dokazati da je

$$\iint_S R(x,y,z)dxdy = \iint_S R(x,y,z)\cos\gamma dS\,,$$

$$\iint_S Q(x,y,z)dxdz = \iint_S Q(x,y,z)\cos\beta dS\,,$$

$$\iint_S P(x,y,z)dydz = \iint_S P(x,y,z)\cos\alpha dS\,,$$

odnosno

$$\iint_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy =$$

$$\iint_S \big(P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma\big)dS\,. \qquad (1)$$

Formula (1) daje vezu između površinskih integrala prve i druge vrste. Ona se često koristi kada se izračunava površinski integral druge vrste. U pripremi za tu zamjenu potrebno je naći kosinuse pravca normale na površ S. Kako je $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$, to je potrebno naći jedinični vektor $\overrightarrow{n_0}$ normale $\vec{n}$ na površ S. Ako je površ S zadata jednačinom $z=f(x,y)$, tada je vektor $\vec{n}=\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x},\frac{\partial f(x,y)}{\partial y},-1\right)$ normalan na površ S. Ako je površ S zadata jednačinom $\varphi(x,y,z)=0$, tada je vektor $\vec{n}=\left(\frac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial x},\frac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial y},\frac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial z}\right)$ normalan na površ S u tački (x,y,z). U zavisnosti kako je orijentisana površ S može se, ako je to potrebno, umjesto $\vec{n}$ uzeti vektor $-\vec{n}$. Jedinični vektor $\overrightarrow{n_0}$ vektora $\vec{n}$ je vektor $\overrightarrow{n_0}=\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$. Slično prethodnom, jedinični vektor $\overrightarrow{n_0}$ vektora $-\vec{n}$ je vektor $\overrightarrow{n_0}=-\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$.

Primjer 9. Izračunati $\oiint\limits_S 3xdydz+2ydxdz-4zdxdy$, ako je S piramida ograničena ravnima $x+y+z=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0$, u pravcu spoljne normale.

Površ S razbijmo na 4 površi:

$$S_1:\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le y\le 1-x\end{cases}\ \text{(strana piramide u ravni } Oxy\text{)},\ \overrightarrow{n_1}=(0,0,-1)\perp S_1,$$

$$S_2:\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le z\le 1-x\end{cases}\ \text{(strana piramide u ravni } Oxz\text{)},\ \overrightarrow{n_2}=(0,-1,0)\perp S_2,$$

$$S_3:\begin{cases}0\le y\le 1\\ 0\le z\le 1-y\end{cases}\ \text{(strana piramide u ravni } Oyz\text{)},\ \overrightarrow{n_3}=(-1,0,0)\perp S_3,$$

$$S_4:\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le y\le 1-x\\ 0\le z\le 1-x-y\end{cases}\ \text{(strana piramide u I oktantu)},\ \overrightarrow{n_4}=\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

Kako je površinski integral površi S jednak sumi površinskih integrala po površima S_1, S_2, S_3 i S_4 (što simbolički možemo zapisati kao $\oiint\limits_S=\iint\limits_{S_1}+\iint\limits_{S_2}+\iint\limits_{S_3}+\iint\limits_{S_4}$), to je potrebno izračunati $I_i=\iint\limits_{S_i}3xdydz+2ydxdz-4zdxdy$, $i=1,2,3,4$. $I_1=4\iint\limits_{S_1}zdS=0$, jer je z=0. $I_2=-2\iint\limits_{S_2}ydS=0$, jer je y=0. $I_3=-3\iint\limits_{S_3}xdS=0$, jer je x=0.

$$I_4=\frac{\sqrt{3}}{3}\iint\limits_{S_4}(3x+2y-4z)\,dS=\frac{\sqrt{3}}{3}\iint\limits_{S_1}[3x+2y-4(1-x-y)]\sqrt{3}dxdy=$$

$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} (7x+6y-4)dy = \frac{1}{6}$. Iz prethodnog slijedi da je

$$\oiint_S 3xdydz + 2ydxdz - 4zdxdy = \frac{1}{6}.$$

Površinski integral druge vrste koristi se za izračunavanje toka (fluksa) vektorskog polja. Tok T vektorskog polja $\overline{F} = P\overline{i} + Q\overline{j} + R\overline{k}$ kroz orijentisanu površ S izračunava se po formuli

$$T = \iint_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy,$$

odnosno po formuli

$$T = \iint_S \left(P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma\right)dS.$$

Primjer 10. Naći tok vektorskog polja $\overline{F} = x^2\overline{i} - y^2\overline{j} + z^2\overline{k}$ kroz dio sfere $x^2+y^2+z^2=R^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ u pravcu spoljne normale.

Kako je vektor $\vec{n} = (2x, 2y, 2z)$ normalan na datu površ u tački (x,y,z), to je $\overline{n_0} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$. Dalje je $z = \sqrt{R-x^2-y^2}$, $dS = \sqrt{1+\frac{x^2}{R-x^2-y^2}+\frac{y^2}{R-x^2-y^2}}dxdy = \frac{R}{\sqrt{R-x^2-y^2}}dxdy$,

$$T = \iint_S \left(x^2\cos\alpha - y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma\right)dS = \iint_S \frac{x^3-y^3+z^3}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dS = \dots = \frac{\pi R^4}{8}.$$